



Chủ đề 8. THỐNG KÊ – XÁC SUẤT

Bài 2. Quy tắc đếm

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Quy tắc cộng

- **Khái niệm:** Nếu hành động 1 có m cách thực hiện, hành động 2 có n cách thực hiện, thì số cách hoàn thành công việc là: $m + n$ cách

- **Mở rộng:** Nếu có k phương án độc lập và phương án thứ i có c_i cách thực hiện, tổng số cách là:

$$c_1 + c_2 + \dots + c_k.$$

2. Quy tắc nhân

- **Khái niệm:** Nếu một công việc gồm 2 công đoạn liên tiếp: công đoạn 1 có m cách, công đoạn 2 có n cách thực hiện, thì số cách hoàn thành công việc là: $m \times n$ cách

- **Mở rộng:** Nếu công việc gồm k công đoạn nối tiếp, công đoạn 1 có n_1 cách, công đoạn 2 có n_2 cách, ..., công đoạn k có n_k cách, tổng số cách là:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

3. Hoán vị

3.1 Hoán vị không lặp

- **Khái niệm:** Một tập hợp gồm n ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó gọi là một hoán vị của n phần tử.

- Công thức tính: Số các hoán vị của n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$$

3.2 Hoán vị lặp

- **Khái niệm:** Một tập hợp gồm n ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$), trong đó có k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, \dots, a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó có n_1 phần tử a_1 , n_2 phần tử $a_2, \dots, n_k$ phần tử a_k , ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và liểu ($n_1, n_2, \dots, n_k$) của k phần tử.

- Công thức tính: Số các hoán vị lặp cấp n và liểu ($n_1, n_2, \dots, n_k$) của k phần tử. là

$$P_n(n_1; n_2; \dots; n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

3.3 Hoán vị vòng quanh

- **Khái niệm:** Một tập hợp gồm n ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Một cách sắp xếp n phần tử này theo một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử

- Công thức tính: Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là

$$Q_n = (n-1)!$$

4. Chỉnh hợp

4.1 Chỉnh hợp không lặp

- **Khái niệm:** Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A

- Công thức tính: Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chú ý.

- Công thức trên cũng đúng cho trường hợp $k=0$ hoặc $k=n$

- Khi $k=n$ thì $A_n^k = A_n^n = P_n = n!$

3.2 Chỉnh hợp lặp

- **Khái niệm:** Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Mỗi dãy gồm k phần tử của A , trong đó mỗi phần

tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A .

- Công thức tính: Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

5. Tổ hợp

- **Khái niệm:** Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k , ($1 \leq k \leq n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

- Công thức tính: Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

B. Các dạng bài tập

Dạng 1. Giải phương trình, bất phương trình liên quan đến hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

Phương pháp chung.

Bước 1: Sử dụng công thức hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để đưa phương trình, bất phương trình về dạng phương trình, bất phương trình cơ bản.

Bước 2: Áp dụng quy tắc giải phương trình, bất phương trình cơ bản để giải.

Bước 3: Đối chiếu điều kiện và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1.1.1 Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{P_n}{P_{n-2}} - \frac{P_n}{P_{n-1}} = 3 & 2) \frac{P_n}{20n} = P_{n-3} & 3) n^3 + \frac{P_n}{P_{n-2}} = 10 \\ 4) \frac{5P_{n-1}}{P_{n-3}P_4} - \frac{P_n}{24P_{n-3}} \leq 5(n-2) & 5) \frac{P_{n+2}}{P_3 \cdot A_{n-1}^{n-4}} = 210 & 6) 2(A_n^3 + 3A_n^2) = P_{n+1} \\ 7) 2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12 & 8) A_n^{10} + A_n^9 = 9A_n^8 & 9) P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n) \\ 10) 2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2 & 11) \frac{A_{x+1}^{y+1} \cdot P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72 & 12) P_{n+3} = 720A_n^5 \cdot P_{n-5} \end{array}$$

Bài tập tương tự 1.1.1. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1) A_n^6 + A_n^5 = A_n^4 & 2) A_n^3 + 15 < 15n & 3) \frac{A_{n+1}^1}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0 \\ 4) C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x & 5) C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10} & 6) C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3 \\ 7) C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1) & 8) A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x & 9) \frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336 \\ 10) \frac{C_{28}^{2x}}{C_{24}^{2x-4}} = \frac{225}{52} & 11) C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x & 12) C_{n-4}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0 \\ 13) 2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30 & 14) \frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10 & 15) C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 110 \end{array}$$

Bài tập tương tự 1.1.2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \frac{A_x^x}{P_{x+1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases} & 2) \frac{C_{x+1}^y}{6} = \frac{C_x^{y+1}}{5} = \frac{C_x^{y-1}}{2} & 3) \begin{cases} C_x^y - C_x^{y+1} = 0 \\ 4C_x^y - 5C_x^{y-1} = 0 \end{cases} \end{array}$$

Dạng 2. Các dạng bài toán đếm.

Loại 2.1. Bài toán đếm liên quan đến số có yếu tố chia hết.

Phương pháp. Sử dụng các dấu hiệu chia hết

Một số dấu hiệu chia hết cần lưu ý:

- Số n chia hết cho 2 khi chữ số tận cùng của nó là 0, 2, 4, 6, 8.
Ví dụ: 24; 508...
- Số n chia hết cho 3 khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.
Ví dụ: 126; 540...
- Số n chia hết cho 4 khi 2 chữ số tận cùng của nó phải chia hết cho 4.
Ví dụ: 116; 544...
- Số n chia hết cho 5 khi chữ số tận cùng của nó là 0 hoặc 5.
Ví dụ: 80, 205...
- Số n chia hết cho 6 khi nó đồng thời chia hết cho 2 và 3.
- Số n chia hết cho 8 khi 3 chữ số cuối cùng của nó phải chia hết cho 8.
- Số n chia hết cho 9 khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 9.
- Số n chia hết cho 10 khi chữ số tận cùng của nó là 0.
- Số n chia hết cho 12 khi nó đồng thời chia hết cho 3 và 4.
- Số n chia hết cho 15 khi nó đồng thời chia hết cho 3 và 5.
- Số n chia hết cho 20 khi hai chữ số tận cùng của nó là 00; 20; 40; 60 và 80
- Số n chia hết cho 25 khi hai chữ số tận cùng của nó là 25; 50; 75; và 00.

Ví dụ 2.1.1 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

- a) Lập được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số từ A .
- b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau từ A

Ví dụ 2.1.2 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

- a) Lập được bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 5 từ A .
- b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 từ A .

Ví dụ 2.1.3 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

- a) Bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và bốn chữ số đó khác nhau từng đôi một.
- b) Bao nhiêu số chia hết cho 5, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.
- c) Bao nhiêu số chia hết cho 9, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.

Bài tập tự luyện 2.1.1 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

- a) Lập được bao nhiêu số lẻ có 5 chữ số từ A .
- b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau từ A .

Bài tập tự luyện 2.1.2 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

- a) Lập được bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 4 từ A .
- b) Lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 3 từ A

Bài tập tự luyện 2.1.3 Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

- a) Bao nhiêu số chẵn có bốn chữ số và bốn chữ số đó khác nhau từng đôi một.
- b) Bao nhiêu số chia hết cho 5, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.
- c) Bao nhiêu số chia hết cho 9, có ba chữ số và ba chữ số đó khác nhau từng đôi một.

Loại 2.2. Bài toán đếm số có ràng buộc lớn hơn, nhỏ hơn.

Phương pháp. Sử dụng vị trí các chữ số để so sánh lớn hơn, nhỏ hơn

Ví dụ 2.2.1 Cho các chữ số: 0, 2, 4, 5, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 226.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 5133.

Ví dụ 2.2.2 Cho các chữ số: 1, 2, 3, 5, 6, 9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 308.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 6256.

Ví dụ 2.2.3 Cho các chữ số: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 702.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 5186.

Bài tập tương tự 2.2.1. Cho các chữ số: 0, 2, 3, 5, 7, 8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 6540

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 2318

Bài tập tương tự 2.2.2. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 5, 6, 8. Từ các số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không bé hơn 2019.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 5008.

Bài tập tương tự 2.2.3. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Từ các số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không bé hơn 5069.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau và không lớn hơn 3002.

Loại 2.3. Bài toán đếm số có liên quan đến số lần xuất hiện các chữ số.**Phương pháp. Sử dụng các phép đếm lặp**

Ví dụ 2.3.1 Cho các chữ số: 0,2,4,5,6,9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 4

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 6

Ví dụ 2.3.2 Cho các chữ số: 0,1,2,5,6,8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 5.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và luôn có mặt chữ số 2.

Ví dụ 2.3.3 Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có đúng năm chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số đứng sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

Ví dụ 2.3.4 Cho các chữ số: 0,1,3,4,5,7. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, luôn có mặt chữ số 3 và chia hết cho 5.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 7.

Ví dụ 2.3.5 Từ các chữ số 1,2,3,4,5,6 có thể thiết lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau.

Ví dụ 2.3.6 Tính các số tự nhiên đôi một khác nhau có 6 chữ số tạo thành từ các số 0,1,2,3,4,5 sao cho 2 chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau.

Bài tập tương tự 2.3.1. Cho các chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 4

b) Có 5 chữ số đôi một khác nhau luôn có mặt chữ số 6

c) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 3.

d) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và luôn có mặt chữ số 8.

Bài tập tương tự 2.3.2. Cho các chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, là số chẵn và luôn có mặt chữ số 4.

b) Có 5 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và luôn có mặt chữ số 3.

Bài tập tương tự 2.3.3. Cho các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, luôn có mặt chữ số 6 và chia hết cho 3.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, và luôn có mặt chữ số 2, 3.

Bài tập tương tự 2.3.4. Cho các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số đôi một khác nhau, là số lẻ và không có mặt chữ số 4.

b) Có 4 chữ số đôi một khác nhau, và luôn có mặt chữ số 1, 6

Bài tập tương tự 2.3.5. Cho các chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, không chia hết cho 5, trong đó:

a) Các chữ số có thể trùng nhau.

b) Các chữ số phải khác nhau

Bài tập tương tự 2.3.6. Cho các chữ số: 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau, trong đó:

a) Tích các chữ số là số lẻ.

b) Tích các chữ số chia hết cho 10.

Bài tập tương tự 2.3.7. Cho các chữ số: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Từ các chữ số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số sao cho:

a) Chữ số 5 có mặt đúng 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

b) Chữ số 3 có mặt 2 lần, chữ số 4 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Bài tập tương tự 2.3.8. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho:

a) Các chữ số đứng liền sau luôn lớn hơn chữ số đứng liền trước?

b) Các chữ số sau luôn nhỏ hơn chữ số đứng liền trước?

Dạng 3. Bài toán chọn, sắp xếp người và đồ vật.

Loại 3.1. Bài toán chọn, sắp xếp người.

Phương pháp. Sử dụng quy tắc đếm

Ví dụ 3.1.1 Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Ví dụ 3.1.2 Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 học sinh để đi làm công tác “Mùa hè xanh”. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 học sinh đó phải có ít nhất:

a) Hai học sinh nữ và hai học sinh nam.

b) Một học sinh nữ và một học sinh nam.

Ví dụ 3.1.3 Một lớp có 18 nam và 12 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn làm cán sự lớp sao cho:

a) Mọi người đều vui vẻ tham gia.

b) Bạn A và B không thể làm việc chung với nhau.

c) Bạn C và D từ chối tham gia.

Bài tập tương tự 3.1.1. Có 5 nam và 5 nữ ngồi vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho hai người đối diện khác phái?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp mà nam và nữ ngồi xen kẽ và đối diện?

Bài tập tương tự 3.1.2. Cần xếp 3 nam và 2 nữ vào 1 hàng ghế có 7 chỗ ngồi sao cho 3 nam ngồi kề nhau và 2 nữ ngồi kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách.

Bài tập tương tự 3.1.3. Xếp 3 nam, 2 nữ vào 8 ghế. Có bao nhiêu cách, nếu:

a) Nam và nữ ngồi tùy ý.

b) Xếp 5 người ngồi kề nhau.

c) Xếp 3 nam ngồi kề, 2 nữ ngồi kề và giữa hai nhóm có ít nhất một ghế trống.

Bài tập tương tự 3.1.4. Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:

a) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà?

b) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông?

Bài tập tương tự 3.1.5. Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và một đứa trẻ. Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang:

a) Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau.

b) Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà.

c) Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông.

d) Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà.

e) Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau.

Bài tập tương tự 3.1.6. Có 7 người đàn ông, 2 người đàn bà và 3 em bé. Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang sao cho:

a) 2 người đàn bà ngồi cạnh nhau và 3 em bé ngồi cạnh nhau.

b) 3 em bé luôn ngồi giữa 2 người đàn bà.

c) Mỗi đứa bé phải ngồi giữa 1 người đàn ông và một người đàn bà.

d) 3 em bé luôn ngồi cạnh nhau.

Bài tập tương tự 3.1.7. Xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp:

a) Nữ luôn đứng cạnh nhau.

b) Nam nữ đứng xen kẽ.

c) Không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau.

d) Nữ luôn đứng thành 2 cặp và hai cặp này không đứng cạnh nhau.

Bài tập tương tự 3.1.8. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:

a) Ghế xếp thành hàng ngang?

b) Ghế xếp thành một bàn tròn?

Bài tập tương tự 3.1.9. Một đoàn tàu có 3 toa chở khách: toa 1, toa 2, toa 3. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất một ghế trống. Hỏi có bao nhiêu:

- a) Cách sắp xếp 4 vị khách lên 3 toa tàu đó?
- b) Cách sắp xếp 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách trên?

Bài tập tương tự 3.1.10. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang trong mỗi yêu cầu sau đây:

- a) Giữa hai bạn nữ bất kỳ đều không có một em nam nào?
- b) Hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau?

Bài tập tương tự 3.1.11. Có 4 gia đình, mỗi gia đình có 1 ông bố, 1 bà mẹ, 1 con trai và 1 con gái cùng tham dự 1 bữa tiệc. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi những người này thành một hàng ngang sao cho:

- a) Các ông bố ngồi chung với nhau, các bà mẹ ngồi chung với nhau, các bé trai ngồi chung với nhau và các bé gái ngồi chung với nhau.
- b) Các thành viên trong 1 gia đình luôn ngồi cạnh nhau và hai đứa con luôn ngồi giữa bố mẹ của mình.

Bài tập tương tự 3.1.12. Có 6 nam, 6 nữ trong đó có 3 bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:

- a) Các bạn nữ không đứng cạnh nhau.
- b) Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
- c) Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
- d) Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.
- e) A, B, C luôn đứng gần nhau.
- f) A, B, C không ai đứng gần nhau.
- g) A, B đứng cách nhau đúng 1 người.
- h) A, B cách nhau đúng 2 người.

Bài tập tương tự 3.1.13. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách:

- a) Chọn ra 5 học sinh, trong đó không có quá 3 nữ.
- b) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ.
- c) Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất 1 nam.
- d) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu.
- e) Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y chỉ có thể hoặc cùng tham gia đoàn đại biểu hoặc không cùng tham gia.

Bài tập tương tự 3.1.14. Mỗi bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

- a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.
- b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

Loại 3.2. Bài toán chọn, sắp xếp đồ vật.

Phương pháp. Sử dụng quy tắc đếm

Ví dụ 3.2.1 Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề có 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Ví dụ 3.2.2 Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu?

Ví dụ 3.2.3 Xếp 3 viên bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 viên bi xanh giống nhau vào một dãy 7 ô trống. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau?

b) Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 viên bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 viên bi xanh xếp cạnh nhau?

Bài tập tương tự 3.2.1. Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 cuốn sách Văn, 4 cuốn sách Nhạc và 3 cuốn sách Họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn.

a) Giả sử thầy giáo chỉ muốn tặng cho các học sinh trên những cuốn sách thuộc 2 thể loại Văn và Nhạc. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

b) Giả sử thầy giáo muốn rằng sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Dạng 4. Bài toán đếm liên quan đến hình học.

Phương pháp.

Bổ đề 1. Với n điểm cho trước trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì số đường thẳng được tạo ra là C_n^2 , số véc tơ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ n đỉnh là A_n^2 .

Bổ đề 2. Cho đa giác lồi n cạnh, số đường chéo của đa giác là $C_n^2 - n$

Bổ đề 3. Cho đa giác lồi n cạnh, xét các tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác, khi đó:

+ Số tam giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác là $n(n-4)$

+ Số tam giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác là n

+ Số tam giác không có cạnh chung với đa giác là $C_n^3 - n(n-4) - n$

Bổ đề 4. Cho đa giác đều có $2n$ cạnh, số các tam giác vuông có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác $n(2n-2)$

Bổ đề 5. Cho đa giác đều có n cạnh, số tam giác tù có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác được tính bởi công thức:

$$\begin{cases} n.C_{\frac{n-2}{2}}^2, & n \text{ chẵn} \\ n.C_{\frac{n-1}{2}}^2, & n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Bổ đề 6. Cho đa giác đều có n cạnh, số tam giác nhọn được tạo thành từ 3 trong n đỉnh của đa giác là:

$$C_n^3 - (\text{số tam giác tù} + \text{số tam giác vuông})$$

Bổ đề 7. Cho đa giác lồi n cạnh, xét các tứ giác có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác, khi đó:

+ Số tứ giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác là $X = n.[C_{n-4}^2 - (n-5)]$

+ Số tứ giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác là $Y = n(n-5) + \frac{n(n-5)}{2}$

+ Số tứ giác có đúng 3 cạnh chung với đa giác là $Z = n$

+ Số tứ giác không có cạnh chung với đa giác là $C_n^4 - (X + Y + Z)$

Bổ đề 8. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh. Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH CHỮ NHẬT là C_n^2

Bổ đề 9. Cho đa giác đều có $4n$ đỉnh. Số tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của đa giác và tạo thành HÌNH VUÔNG là n

Ví dụ 4.1.1 Cho 10 điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

a) Cứ 2 điểm có 1 đường thẳng đi qua nên có C_{10}^2 đường thẳng cần tìm.

b) Vectơ có phân biệt điểm đầu cuối nên với 2 điểm có 2 vectơ nên có A_{10}^2 vectơ.

c) Cứ 3 điểm lập thành một tam giác nên có C_{10}^3 tam giác.

d) Cứ 4 điểm không đồng phẳng thì tạo thành 1 tứ diện nên có C_{10}^4 tứ diện được thiết lập.

Ví dụ 4.1.2 Cho mặt phẳng cho đa giác đều H có 20 cạnh. Xét các tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của H .

a) Có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy?

b) Có bao nhiêu tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của H ?

c) Có bao nhiêu tam giác có đúng một cạnh là cạnh của H ? Có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của H ?

Bài tập tương tự 4.1.1. Cho hai đường thẳng song song $d_1 // d_2$. Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 .

